Universidade Federal Do Rio Grande Do Norte
Centro De Ciências Exatas e Da Terra
Departamento De Matemática

Trabalho de Ensino e Extenção
Programa de Educação Tutorial - PET Matemática

Minicurso de Recepção a Futuros Matemáticos

Tutor Responsável:
Prof. Dr. Jonas Gonçalves Lopes
Alunos:
Josenildo Simões da Silva
Maykel Anderson Souza Carneiro
Ruan Barbosa Fernandes
Thales Bruno da Silva Oliveira

Natal - RN
Março - 2015

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Boas Vindas

É com grande prazer que recebemos a todos e que sejam muito bem vindos ao curso de Matemática. O primeiro passo de uma jornada a fim de um grande propósito foi dado.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é proporcionar aos recém ingressantes do curso de Matemática da UFRN uma visão e maturidade no que diz respeito a técnicas e elementos fundamentais do rigor matemático, dando-lhes uma introdução básica necessária.

1.3 Filosofia

É de extrema impotância que o discente não deixe de praticar tal aprendizado, pois as disciplinas que compõem tanto o Bacharelado quanto a Licenciatura do curso exigem do aluno um grau de profundidade em formulações e organização do Raciocínio Lógico Matemático bem elaborados e estruturados.

1.4 Temas abordados

No capítulo seguinte, veremos técnicas de demontração e organização lógica textual para o seu desenvolvimento, tais como elegância e simbologismos. No terceiro capítulo, será introduzido uma noção básica do Método de Indução e a resolução de importantes problemas. Por fim, para a conclusão do conteúdo, trataremos um pouco sobre a Lógica Matemático Perceptiva, que irá nos levar a uma reflexão bastante interessante sobre nossa percepção matemática.

Capítulo 2

Métodos de Demonstração

2.1 Organização do Conhecimento Matemático

(I) **O que é uma Definição?** Um enunciado que descreve o significado de um termo.

Ex.: (Definição de linha, segundo Euclides) Linha é o que tem comprimento e não tem largura.

(II) **O que é um Axioma?** Um ponto de partida de raciocínio, uma proposição assumida como verdadeira.

Ex.: (Primeiro postulado de Euclides) Pode-se traçar uma única linha reta entre dois pontos distintos.

(III) **O que é um Teorema?** Uma proposição de alta relevância teórica que se demonstra ser verdadeira, baseada em proposições anteriores.

Ex.: (Teorema de Pitágoras) A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

(IV) **O que é uma Demonstração?** É a prova de que um teorema é verdadeiro, obtida por regras válidas.

Em geral, existem várias maneiras de se demonstrar um teorema. Agora, vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

(1) Um número inteiro não nulo a divide um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$;

(2) Se a divide b, dizemos que b é múltiplo de a;

(3) Um número inteiro a é dito par se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$, portanto, a é múltiplo de 2;

(4) Um número inteiro b é dito ímpar se 2 não divide b, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que $b = 2k + 1$;

(5) Um número real r é dito racional se existirem números inteiros p, q tais que $r = \frac{p}{q}$;

(6) Um número real r é dito irracional se não for racional, ou seja, se não existem inteiros p, q tal que $r = \frac{p}{q}$.

2.2 Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais direta: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q. (*)

Exemplo 2.2.1. *Demonstre que, se n, m são números pares, então $n + m$ também é par.*

(i) Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares;

(ii) Tese (conclusão): $n + m$ é par.

Demonstração. Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2l$, onde k e l são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2l = 2(k + l).$$

Concluímos que $n + m$ é múltiplo de 2, ou seja, $n + m$ é par.

□

Exemplo 2.2.2. *Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.*

OBS.: Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q,"mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

(i) Hipótese: n é ímpar;

(ii) Tese (conclusão): n^2 é ímpar.

Demonstração. Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1,$$

onde $l = 2k2 + 2k$ é um inteiro. Portanto, n^2 é ímpar.

□

2.3 Demonstração por Contraposição

Por (*), temos:

(i) "$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p";

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 2.3.1. *Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.*

Proposição: n^2 é par $\Rightarrow n$ é par.

Note que a proposição é bem simples, e poderíamos usar uma demonstração direta. Contudo, ao observar a contrapositiva:

Contrapositiva: n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar.

(i) Hipótese: n é ímpar;

(ii) Tese (conclusão): n^2 é ímpar.

Demonstração. A contrapositiva é verdadeira, conforme demonstramos no exemplo 2. Portanto, a proposição original também é verdadeira.

□

Exemplo 2.3.2. *Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.*

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow n$ e m tem mesma paridade.
OBS.: Note que o universo do discurso são os números inteiros.

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow n + m$ é ímpar.
OBS.: O universo do discurso ainda é o mesmo.

(i) Hipótese: n e m tem paridades diferentes;

(ii) Tese (conclusão): $n + m$ é ímpar.

Demonstração. Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2l + 1$, para inteiros k e l (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

$$n + m = 2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1 = 2q + 1,$$

onde $q = k + l$ é inteiro. Portanto $n + m$ é ímpar.

□

2.4 Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se, alguma proposição do tipo p fosse verdadeira, ocorreria uma contradição lógica, e portanto p só pode ser falso, logo, o resultando de não p é verdadeiro.

Exemplo 2.4.1. *Algum dia será possível criar um programa de computador que **sempre ganhe** no xadrez?*

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida: $p =$ "existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez."

Supondo que tal programa existe, instale a mesma cópia em dois computadores e coloque um para jogar contra o outro. Ou o jogo terminará empatado (sem nenhum ganhador), ou um dos computadores perderá. Em qualquer destes casos, pelo menos uma das duas cópias do programa não vai ganhar o jogo, uma contradição, já que assumimos que o programa **sempre ganha**.

Portanto, não existe (nem nunca existirá) um programa que sempre ganhe no xadrez.

□

Exemplo 2.4.2. *Demonstre que existem infinitos números primos.*

(i) Hipótese: (todo e qualquer resultado que não depende deste);

(ii) Tese (conclusão): $p =$ "Existem infinitos números primos".

Demonstração. Vamos deixar de lado a tese por um momento e supor o seguinte:

Hipótese (absurda): não $p =$ "existe uma quantidade finita de números primos".

Vejamos até onde ela nos leva.

Por esta nova hipótese, há apenas n números primos, onde n é inteiro. Podemos colocar os primos $p_1, p_2, ..., p_n$ em ordem, de tal forma que:

$$p_1 < p_2 < ... < p_n.$$

Com isto, teríamos que p_n é o maior primo de todos.

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$, portanto ele também é primo e, além disso, é maior do que todos os demais números primos, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo!

Como o nosso raciocínio foi construído corretamente após a hipótese não p, isto nos leva a concluir que não p é falsa, consequentemente a proposição $p =$ "existem infinitos números primos"é verdadeira.

$\square$

Exemplo 2.4.3. *Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$2 = (\sqrt{2})^2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \quad (\div 2)$$

$$b^2 = 2k^2$$

O que nos diz que b também é par. Mas isto é uma contradição, pois se a e b são pares, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ poderia ser reduzida, um absurdo! Logo, podemos concluir que o número real $\sqrt{2}$ não pode ser racional, portanto é irracional.

$\square$

2.5 Resumo: Métodos de Demonstração

(1) **Demonstração Direta:** partindo da hipótese, use diretamente propriedades e regras válidas até chegar na tese;

(2) **Demonstração por Contraposição:** para algumas proposições do tipo $p \Rightarrow q$, pode ser mais fácil demonstrar (usando os outros métodos) não $q \Rightarrow$ não p;

(3) **Demonstração por Redução ao Absurdo:** dada uma proposição p a ser provada, assuma inicialmente a hipótese não p, e faça um raciocínio direto a partir desta hipótese até achar uma contradição.

(⊛) Dica 1: geralmente, é uma boa idéia tentar aplicar os métodos nesta ordem.

(⊛) Dica 2: é comum demonstrações do tipo "número x é irracional"ou "não existe x tal que..."serem por redução ao absurdo.

2.6 Demonstração do tipo "se, e somente se" (Bônus)

O seguinte enunciado é muito comum:

"p (é verdade) se, e somente se, q (é verdade)"

Ou, na forma simbólica, "$p \Leftrightarrow q$" *(lê-se: p, se e somente se, q)*

Isto equivale a duas proposições:

"se p então q" **E** "se q então p"

Ou, simbolicamente, "$(p \Rightarrow q)$ e $(q \Rightarrow p)$".

Cada uma das duas proposições deve ser demonstrada separadamente.

Exemplo 2.6.1. *Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é um número ímpar.*

Demonstração. Temos que provar as implicações:

(i) a e b possuem paridades diferentes $\Rightarrow a + b$ é ímpar;

(ii) $a + b$ é ímpar $\Rightarrow a$ e b possuem paridades diferentes.

Note que a implicação 1 é a contrapositiva da proposição do exemplo 4, portanto já foi demonstrada ser verdadeira.

Resta agora demonstrar a implicação 2, usando algum dos métodos vistos (direto, por contrapositiva, por redução ao absurdo). Deixaremo-a a cargo do leitor.

Capítulo 3

Método de Indução

O axioma da indução é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência). Para a mostrar que um determinado enunciado é válido, o método indutivo tem como base:

(i) Demonstrar que o enunciado é válido para n = 1;

(ii) Supondo o enunciado válido para n = k , demonstrar que o mesmo é válido para n = k+1.

3.1 Exercícios

Mostrar, por indução, os seguintes resultados:

(a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;

(c) $4 + 8 + 12 + ... + 4n = 2n(n + 1)$;

(d) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ é divisível por 9;

(e) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(f) $sen(2^n \cdot \theta) = 2^n \cdot sen(\theta) \cdot cos(\theta) \cdot cos(2\theta) \cdot ... \cdot cos(2^{n-1}\theta)$;

(g) Seja $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ uma função tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todos os $x, y \in \mathcal{N}$. Fixado $a \in \mathcal{N}$, mostre que $f(a^n) = nf(a)$, para todo $n \in \mathcal{N}$;

(h) $(T^{-1}AT)^n = T^{-1}A^nT$, $\forall n \in N$.

Capítulo 4

Lógica Matemático Perceptiva

4.1 Percepção Estrutural e A Memória Matemática

Ao solucionar um problema matemático, o indivíduo, inicialmente, percebe seus elementos componentes, sinteticamente e analiticamente, isolando-os, estabelecendo hierarquia, combinações e relações entre eles. Considerando algumas relações teóricas entre a percepção da estrutura de um problema, a memória e a memória matemática, buscou-se estudar tais relações empiricamente.

A atividade de solução de problemas matemáticos pode evidenciar diversas reações e processos cognitivos superiores a ela subjacentes, dentre eles: a percepção, a representação, a imagem, a retenção e a recuperação de informações contidas na memória. Ao elaborar a representação de um problema, indivíduos habilidosos são capazes de diferenciar claramente três elementos em um problema: as relações que possuem significado matemático básico; as quantidades não essenciais para aquele tipo de problema, mas que são essenciais naquela variante; e as quantidades supérfluas para aquele problema específico. Assim, percebem o material matemático contido no enunciado verbal de um problema de forma analítica (isolando diferentes elementos da estrutura, acessando-os de maneira diferenciada, sistematizando-os e determinando sua hierarquia) e de forma sintética (combinando os elementos, estabelecendo relações matemáticas e funções de dependência entre eles), simultaneamente. Dentre os determinantes da representação de um problema, estão os conhecimentos prévios do indivíduo. Ao formar a representação de um problema, este recupera na memória, os procedimentos adequados aplicáveis àquela situação e é exatamente essa representação que vai orientar a recordação de tais procedimentos.

De acordo com a afirmação anterior, durante a solução de problemas, alguns processos cognitivos superiores podem ser evidenciados, dentre eles: a percepção, a representação, e a memória.

A percepção consiste em um conjunto de processos psicológicos, pelos quais as pessoas reconhecem, organizam, sintetizam e fornecem significação, em nível cognitivo, às sensações recebidas dos estímulos ambientais, através dos órgãos dos sentidos. Em particular, a percepção da estrutura de um problema matemático, refere-se ao reconhecimento, à organização, à síntese e à significação de elementos do problema, relacionando-os a elementos da memória matemática. A percepção pode ser tratada de acordo com duas perspectivas e pode ser vista como percepção construtiva ou percepção direta. A percepção construtiva, ou inteligente, admite que o sujeito crie a percepção (a compreensão cognitiva) usando, a partir do estímulo, a informação sensorial, vista como fundamento da estrutura perceptual, além de utilizar outras fontes de informação. Na teoria da percepção construtiva, o pensamento de ordem superior é relevante na construção da percepção e, durante essa construção, várias hipóteses são testadas. Existe, portanto, uma interação entre a inteligência e os processos perceptivos, sendo por isso também chamada de percepção inteligente. Na teoria da percepção direta, as informações e o contexto são necessários e suficientes para a formação da percepção e os indícios necessários à construção da percepção são estritamente inerentes ao estímulo.

A representação do conhecimento é a forma pela qual o sujeito conhece objetos, eventos e idéias que são externos a sua estrutura cognitiva. A representação compreende várias formas do pensamento e permite criar e modificar as estruturas do conhecimento declarativo e de procedimento que o sujeito possui. Esse processo cognitivo difere de acordo com a natureza do conhecimento, que pode ser classificado em declarativo (corpo organizado de informações factuais), ou de procedimentos (algoritmos de execução de uma tarefa).

Memória é um sistema de armazenamento e recuperação de informação, obtida através dos sentidos. Embora a palavra memória sugira a existência de um termo unitário, trata-se de um sistema múltiplo, pois não existe um único sistema, mas muitos, e estes "variam em armazenamento desde pequenos armazenamentos momentâneos ao sistema de memória de longo prazo, que parece exceder extensamente em capacidade e flexibilidade ao maior ordenador disponível". Trata-se de um mecanismo capaz de realizar a retenção de conhecimentos de qualquer natureza, com os quais, em algum momento, o sujeito estabeleceu qualquer relação. Além da capacidade aparentemente ilimitada, suas características fundamentais são a persistência duradoura de seus conteúdos e a pluralidade de códigos (devido à capacidade de retenção de conhecimentos de naturezas distintas, por diferentes meios para a aquisição), ainda que exista um predomínio de codificações semânticas.

A memória matemática é um componente da habilidade matemática, relacionado ao terceiro estágio da solução de problemas (a retenção da informação matemática). Trata-se de uma retenção generalizada e operante, e uma rápida elaboração de representações de problemas e relações, no domínio dos símbolos numéricos e verbais. A memória matemática é notavelmente seletiva, ou seja, a estrutura cognitiva não retém toda a informação matemática disponível na situação, mas "refina"os dados concretos que representam estruturas abreviadas e generalizadas. Esse tipo de retenção torna o método mais econômico e conveniente, pois, ao reter a informação deste modo, não sobrecarrega a estrutura cognitiva com informações desnecessárias, permitindo que mais informações sejam retidas e, conseqüentemente, que sejam acessadas mais facilmente.

4.2 Lógica Perceptiva

Definição da palavra Lógica (dicionário):

Lógica.: Modo de raciocinar tal como de fato se exerce: **Lógica natural**. 2 Filos Estudo que tem por objeto determinar quais as operações que são válidas e quais as que não o são: **Lógica formal**, que trata dos conceitos, juízos e raciocínios, independentemente de seu conteúdo. Mais modernamente, análise das formas e leis do pensamento, seja do ponto de vista racionalista e crítico, seja daquele em que se descreve a experiência: **Lógica genética**, **lógica das ciências**, **lógica simbólica**, **lógica matemática**.

As seguintes perguntas deverão ser respondidas pelo leitor.

1) ***O que é uma coisa ou algo ser lógico?***

2) ***O que leva algo a ser lógico?***

3) ***Porque temos esse sentido de intuição?***

4) ***O que é um dado evento ser lógico?***

5) ***O que é necessário para algo ser lógico?***

6) ***Qual o papel da Matemática nesse tipo de pensamento perceptivo?***

7) ***Cite alguns benefícios que ela nos traz.***

8) ***Existe(m) alguma(s) desvantagem(ns)?***

Referências Bibliográficas

[1] Rodrigo Hausen, Métodos de Demonstração, 2013.

[2] Elon L. L., Paulo C. P. C., Eduardo W., Augusto C. M., A Matemática do Ensino Médio, 9º.ed., Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[3] Érica Valeria Alves, Márcia Regina Ferreira de Brito, Relações entre a percepção da estrutura de um problema, a memória e a memória matemática, Temas psicol. v.15 n.2, Ribeirão Preto, 2007.