Exame de Seleção **PET Matemática** **18 de outubro de 2018**

Segue o gabarito da prova realizada no dia 18/10/2018.

1. **Encontre o domínio da seguinte função**

$$f(x) = \sqrt{log_{\frac{1}{5}} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}}$$

Resolução: Analisando a função, sabemos que o $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ é um número positivo menor ou igual a 1.Para a fração ser positiva precisamos que o numerador e o denominador sejam ambos negativos ou ambos positivos. Podemos deduzir que $2x^2 - 5x + 3 < 0$ apenas quando $x \in (1, \frac{3}{2})$,e $x^2 - 1 < 0$ apenas quando $x \in (-1, 1)$, portanto desconsideraremos o caso que são ambos negativos. Para ambos serem positivas temos que $x < -1$ ou $x > \frac{3}{2}$.

Agora ,como descartamos o caso de $x^2 - 1 < 0$, nós podemos analisar a desigualdade $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} \leq 1$, implicando que

$$2x^2 - 5x + 3 \leq x^2 - 1 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Longrightarrow x \in [1, 4]$$

Por fim, pegando a interseção das restrições, obtemos que $\frac{3}{2} < x \leq 4$

2. Diz-se que uma função $y = f(x), x \in X$ é periódica em X, se existe um número T, $T \neq 0$, tal que: $x + T$ e $x - T$ pertencem a X, para qualquer $x \in X$ e $f(x + T) = f(x), \forall x \in X$. Mostre que a função

$$f(x) = \sqrt[4]{\log_3 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{17}}}$$

é periódica e encontre o período

Resolução: Primeiramente temos que analisar qual domínio da função; para ela estar bem definida $\cos \frac{2\pi x}{\sqrt{17}} = 1$, ou seja, $\frac{2\pi x}{\sqrt{17}} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Isso implica que $x = k\sqrt{17}$,portanto o domínio da f é igual $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x = k\sqrt{17}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dessa forma, iremos conjecturar $T = \sqrt{17}$ é o período da f. Note que, $x + T, x - T \in D_f$, pois temos que $x + T = k\sqrt{17} + \sqrt{17} = (k + 1)\sqrt{17}$ e $x - T = k\sqrt{17} - \sqrt{17} = (k - 1)\sqrt{17}$. Agora, basta verificar que f(x)=f(x+T). Temos que,

$$f(x) = \sqrt[4]{\log_3 \cos(\tfrac{2\pi x}{\sqrt{17}})} = \sqrt[4]{\log_3 1} = \sqrt[4]{0} = 0$$

isso acontece para cada x pertencente ao domínio, em particular para $x + T$

3. **demonstre que**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

Resolução: temos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

Então, basta provarmos que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - 0| < \delta \implies \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} - 0 \right| < \epsilon$.

Para provar isso usaremos que $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| \leq \left|\dfrac{x}{2}\right| \leq |x|$. Daí, para cada $\epsilon > 0$ escolhemos $\delta = \epsilon$, portanto, se $0 < |x - 0| < \delta$, então

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

4. Calcule os seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin 5x}$$

Resolução: temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\dfrac{\sin x}{x}x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}5x} = \frac{1}{5}$$

5. Para qual valor de A a seguinte função é contínua no ponto x=0?

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{ln(x+1) - ln(1-x)}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ A & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Resolução: Para que f seja contínua em $x = 0$, basta que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = A$. Assim,

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1) - ln(1-x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{2x} - \lim_{x\to 0} \frac{ln(1-x)}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)^{1/x}}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{ln(1-x)^{-1/x}}{2} = \frac{ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x})}{2} + \frac{ln(\lim_{x\to 0}(1-x)^{-1/x})}{2} = \frac{ln(e)}{2} + \frac{ln(e)}{2} = 1$$

The End.