Segue o gabarito da prova realizada no dia 14/03/2019.

1. **Seja X um intervalo simétrico da reta numérica: se $x \in X$, então $-x \in X$. A seguinte função é par?**

$$f(x) = \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right)\left(x - \log_5 \frac{2+x}{2-x}\right)$$

Resolução: Para essa função ser par, basta demonstrar que $f(-x) = f(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left(\log_3 \frac{-x+1}{-x-1}\right)\left(-x - \log_5 \frac{2-x}{2-(-x)}\right) \\ &= \left(\log_3 \frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)\left(-x - \log_5 \frac{2-x}{2+x)}\right) \\ &= \left(\log_3 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}\right)\left(-x - \log_5 \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}\right) \\ &= \left((-1)\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right)\left(-x - (-1)\log_5 \frac{2+x}{2-x}\right) \\ &= \left((-1)\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right)\left[(-1)\left(x - \log_5 \frac{2+x}{2-x}\right)\right] = \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right)\left(x - \log_5 \frac{2+x}{2-x}\right) = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

2. **Encontre o máximo e mínimo da função**

$$f(x) = 1 + \cos 2x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$

Resolução: Primeiramente, usaremos duas igualdades $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \cos 2x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 - \cos^2 x \\ &= 2 + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned} \tag{2}$$

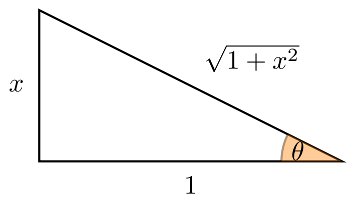
Agora, chamaremos $t = \operatorname{sen} x$ e verificaremos o máximos e mínimos de $g(t) = 2 + t - t^2$ quando $t \in [-1, 1]$. Como possuímos uma função quadrática da forma $at^2 + bt + c$ com $a < 0$, então sabemos que o $\max f(x) = \max g(t) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1 - 4(2)(-1)}{4(-1)} = \frac{9}{4}$, e esse máximo é alcançado quando $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$. Portanto, $\frac{9}{4}$ realmente será o máximo. Note que, $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x \geq 0$ pela limitação da função seno, e de fato $f(\pi) = 2 + \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}^2\pi = 2 - 1 - (-1)^2 = 0$, então 0 será de fato o mínimo. Dessa forma, $0 \leq f(x) \leq \frac{9}{4}$

3. **Calcule**

$$\arcsin\{\cos[2\arctan(\sqrt{2}+1)]\}$$

Resolução: Primeiramente, observemos que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$. Assim, passaremos a analisar

$\cos[2\arctan(\sqrt{2}+1)] = \cos^2[\arctan(\sqrt{2}+1)] - \operatorname{sen}^2[\arctan(\sqrt{2}+1)]$. Agora, observe o triângulo:



Podemos notar que $\theta = \arctan x$. Mas, podemos dizer que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Tomemos $x = \sqrt{2}+1$, portanto, obteremos:

$\cos^2[\arctan(\sqrt{2}+1)] - \operatorname{sen}^2[\arctan(\sqrt{2}+1)] = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2}}\right)^2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$

Agora, racionalizando, obtemos

$\left(\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, $\arcsin\{\cos[2\arctan(\sqrt{2}+1)]\} = \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

4. **Calcule o seguinte limite:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)(1+2x)...(1+10x)}{x^{10}+345678}$$

Resolução: temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)(1+2x)...(1+10x)}{x^{10}+345678} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)...\left(\frac{1}{x}+10\right)}{x^{10}\left(1+\frac{345678}{x^{10}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+2\right)...\left(\frac{1}{x}+10\right)}{\left(1+\frac{345678}{x^{10}}\right)} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1} = 10!$$

5. **Analise a continuidade da função:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x+\cos x)}{x+\operatorname{sen}x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Resolução: Para que f seja contínua em $x = 0$, basta que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Porém,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+\cos x)}{x+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x(x+\cos x)}{x}}{\dfrac{x+\operatorname{sen}x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+\cos x)}{1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}} = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2} \neq f(0) = 1$, então a função não pode ser contínua.

The End.