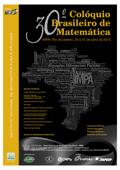
Universidade Federal Do Rio Grande Do Norte
Centro De Ciências Exatas e Da Terra
Departamento De Matemática



Seminário de Pesquisa

PET - Matemática - UFRN

Por
Thales Bruno da Silva Oliveira

Tema:

Uma breve introdução sobre
Geração de Malhas por Refinamento de Dalaunay
(30º Colóquio Brasileiro de Matemática/IMPA)

Um trabalho de

Marcelo Siqueira (UFRN)
Afonso Paiva (USP - São Carlos)
Paulo Pagliosa (UFMG)

Natal - RN
Setembro - 2015

Malhas e geração de malhas

Uma *malha* é uma subdivisão de um domínio geométrico em formas geométricas menores e mais simples, denominadas *elementos*, tais como triângulos e quadrados, se o domínio for planar - 2D, e tetraedros e hexaedros, se o domínio for espacial - 3D. Malhas são utilizadas por aplicações de diversas áreas do conhecimento. Em geografia e cartografia, malhas são utilizadas para interpolar mapas de altura em terrenos, na confecção de mapas, na geração de curvas de nível e na visualização topográfia. Em computação gráfica, objetos gráficos são, em geral, convertidos para uma malha antes de serem submetidos à operação de "renderização"e malhas poligonais têm se tornado o padrão de *facto* na representação de objetos gráficos. Em geral, malhas são necessárias em aplicações que se utilizam de interpolação ou aproximação multivariada.

De particular interesse para muitas aplicações da diversas engenharias é o fato da geração de uma malha do domínio do problema ser um pré-requisito para o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico[1], que é um dos métodos numéricos mais potentes e populares para a solução de equações diferenciais parciais na forma variacional. A acurácia e precisão da solução numérica dessas equações, pelo MEF, aliadas à eficiência com a qual a solução é obtida, são altamente dependentes de parâmetros de *qualidade* da malha, tais como quantidade e forma dos elementos, além de regularidade, direcionalidade e adaptatividade da própria malha.

A grande maioria dos algoritmos de geração de malhas descritos na literatura assume que o domínio, Ω, para o qual uma malha deve ser criada é um conjunto compacto de $\mathbb{E}^d$ cuja fronteira é definida por um *complexo politopal.* Quando $d = 2$, o domínio Ω é simplesmente uma região poligonal de $\mathbb{E}^2$ (com ou sem buracos). Quando $d = 3$, o domínio Ω é simplesmente uma região poliedral de $\mathbb{E}^3$ (com ou sem buracos). A fronteira de Ω também pode ser descrita por uma curva suave (por partes), fechada e limitada se $\Omega \subset \mathrm{E}^2$.

Nos últimos 30 anos, malhas de triângulos de regiões poligonais (convexas e não convexas), ou limitadas por curvas suaves, em $\mathbb{E}^2$ têm sido detalhadamente investigadas pela comunidade científica e suas propriedades teóricas são atualmente bem compreendidas. Isto resultou no desenvolvimento de algoritmos de geração de malhas de triângulos capazes de gerar malhas cujos valores de parâmetros , tais como quantidade e forma dos triângulos e adaptatividade da malha, são comprovadamente ótimos ou quase ótimos. O termo *comprovadamente* é usado nesse material para qualificar uma propriedade (matemática) que pode ser verificada por uma prova.

Em contraste com o estado-da-arte para malhas de triângulos, as propriedades

[1] O termo "clássico"é usado aqui para distinguir a formulção do MEF baseada em malhas daquela que não utiliza malhas (*meshless*). A formução *meshless* apresenta várias limitações em relação à clássica.

teóricas de malhas de quadriláteros para regiões planares ainda não são bem compreendidas. Apesar da existência de algoritmos de geração de malhas de quadriláteros que otimizam algum parâmetro da malha, não se conhece um algoritmo para gerar malhas de qudriláteros que, comprovadamente e *simultaneamente*, otimize vários parâmetros da malha.

E se tratando de uma região poliedral (convexa ou não convexa) em $\mathbb{E}^3$, ou limitada por superfícies suaves (por partes), o problema de gerar uma malha comprovadamente boa oferece alguns bons desafios de pesquisa. Nos últimos 25 anos foram desenvolvidos vários algoritmos para geração de malhas de tetraedros com garantias teóricas para a qualidade da malha gerada. Muitos desses algoritmos podem ser vistos como extensões do caso bidimensional (isto é, malhas de triângulos) para o caso tridimensional (isto é, malhas de tetraedros). Infelizmente, algumas garantias teóricas oferecidas pelos algoritmos para malhas de triângulos não foram estendidas, com o mesmo êxito, para malhas de tetraedros e é aí que reside uma boa fonte de problemas.

Quando se deseja gerar uma malha de haxaedros para região poliedral (convexa ou não convexa), muito pouco é conhecido em termos de garantias teóricas para parâmetros de qualidade da malha. A maioria dos esforços de pesquisa que resultou em algoritmos com alguma garantia teórica se limita aos aspectos topológicos das malhas; isto é, tais algoritmos não definem uma geometria para a malha. O trabalho recente de Jeff Erickson representa um avanço significantivo em termos de garantias teóricas para malhas de hexaedros. Por outro lado, há uma enorme quantidade de algoritmos para geração de malhas de hexaedros que se baseiam em heurísticas e que representa bons resultados experimentais para uma larga classe de domínios espaciais.

Refinamento de Delaunay

A vasta maioria dos algoritmos capazes de produzir malhas de triângulos ou tetraedros comprovadamente boas é baseada na técnica conhecida por *refinamento de Delaunay*. Esta técnica foi desenvolvida, originalmente, para gerar malhas de triângulos de regiões poligonais, Ω, em $\mathbb{E}^2$. Os algoritmos baseados em refinamento de Delaunay constroem uma *triangulação de Delaunay*, $\mathcal{TD}(P)$, do conjunto, P, de vértices da curva poligonal de fronteira de Ω. Em seguinda, a triangulação $\mathcal{TD}(P)$ é *refinada* para que dois objetivos sejam atingidos: (a) a fronteira de Ω seja totalmente coberta por uma união de arestas de $\mathcal{TD}(P)$ e (b) todos os triângulos de $\mathcal{TD}(P)$ (no interior de Ω) passem em um teste de qualidade de forma geométrica. Por refinar $\mathcal{TD}(P)$, entenda a inserção de vértices extras (de Steiner) em $\mathcal{TD}(P)$.

Podemos mostrar que, sob determinadas condições, o processo de refinamento de Delaunay sempre termina e produz uma malha de saída que cumpre os objetivos (a) e (b). Por definição, o domínio coberto por $\mathcal{TD}(P)$ é o fecho convexo, $FC(P)$, do conjunto, P, de vértices de Ω. Quando Ω é um subconjunto próprio de $FC(P)$, os algoritmos baseados em refinamento de Delaunay removem de $\mathcal{TD}(P)$ os triângulos no exterior de Ω.

Um outro aspecto importante do problema de geração de malhas diz respeito à quantidade de elementos da malha, ou seja, o *tamanho* da malha. Jim Ruppert definiu uma função, denominada *local feature size*, ou simplesmente *lfs*, que, de certa forma, captura a noção de complexidade de espaço de um domínio geométrico. Usando esta função, Ruppert definiu um critério para avaliar a otimalidade de tamanho de uma malha; a saber, se $\Omega \subset \mathrm{E}^d$ é umo conjunto compacto que representa o domínio do problema em um espaço (afim) euclidiano d-dimensional, então uma malha para Ω possui *tamanho ótimo* se

$$m \in \Theta\left(\int_{x \in \Omega} \frac{1}{\mathit{lfs}(x)^d}\, dx \right),$$

em que m é o número de vértices da malha. Usando este critério de otimalidade de tamanho, podemos provar que os algoritmos para geração de malhas via refinamento de Delaunay produzem malhas de tamanho ótimo quando $d = 2$. Para $d \geq 3$, os algoritmos baseados em refinamento de Delaunay e disponíveis na literatura não desfrutam da mesma garantia. O algoritmo desenvolvido por Mitchell e Vavasis, que *não* se baseia em refinamento de Delaunay, produz malhas de tamanho ótimo, mas apresenta outras limitações práticas, tais como o alinhamento de elementos com eixos coordenados (anisotropia).