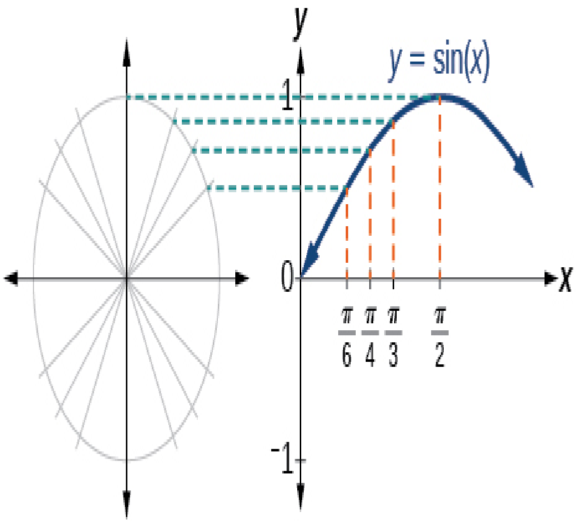
Minicurso de Trigonometria
PET-Matemática



Este trabalho foi elaborado pelo grupo PET-MAT. da UFRN

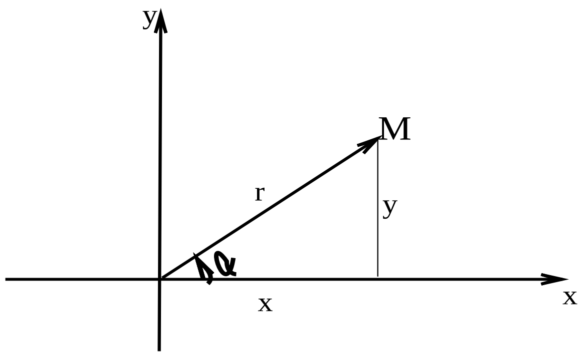
Natal, Abril de 2019

Sumário

Capítulo 1

Funções Trigonométricas de Ângulos Arbitrários

Suponhamos que $\vec{r} = \vec{OM}$ o raio vetor do ponto M forma um ângulo α com o eixo positivo das abscissas, onde x e y são a abscissa e ordenada do ponto M. O ângulo α é medido em graus ou radianos. A seguir introduzimos as principais funções trigonométricas.



1. Seno do ângulo α, é a razão entre a ordenada y e o módulo do raio vetor $\vec{r}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \tag{1.1}$$

2. Cosseno do ângulo α, é a razão entre a abscissa x e o módulo do raio vetor $\vec{r}$:

$$\cos\alpha = \frac{y}{r} \tag{1.2}$$

Observação 1.1 *Observa-se que* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\alpha$ *definidos acima (1.1) e (1.2) dependem apenas do ângulo* α *e não do raio* r *da circunferência.*

3. Tangente do ângulo α, é a razão entre a ordenada y e a abscissa x ou:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.3}$$

4. Cotangente do ângulo α, é a razão entre a abscissa x e a ordenada y ou:

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \tag{1.4}$$

5. Secante do ângulo α, é o inverso multiplicatico de $\cos\alpha$:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{1.5}$$

6. Cosecante do ângulo α, é o inverso multiplicatico de $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{1.6}$$

Obviamente as definições (1.3) e (1.4) tem sentido se $\cos\alpha \neq 0$ e $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ respectivamente.

Pela Observação 1.1, as definições trigonométricas definidas acima, independem do raio r da circunferência, por isso podemos supor por simplicidade, $r = 1$. Tal círculo chama-se círculo trigonométrico. Assim as funções (1.1)-(1.6) podemos escreve-las

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = y, & \cos\alpha = x \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x}, & \operatorname{cotan}\dfrac{x}{y} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{x}, & \operatorname{cosec}\dfrac{1}{y} \end{cases} \tag{1.7}$$

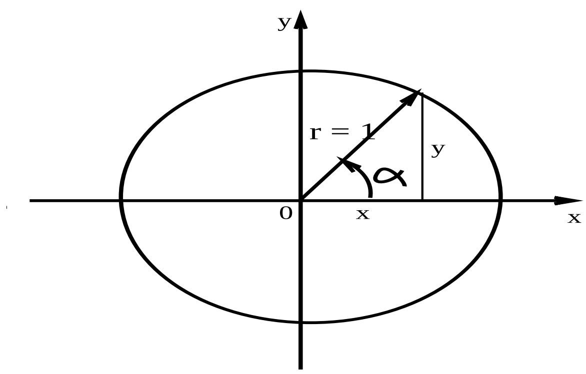


Figura 1.1: Círculo trigonométrico

Se o ângulo α é medido em graus e queremos transforma-lo para radianos, usamos a fórmula

$$\beta = \frac{\pi.\alpha}{180}, \tag{1.8}$$

mas se o ângulo α é medido em radianos e queremos transforma-lo para graus, usamos a seguinte fórmula

$$\beta^o = \frac{180.\alpha}{\pi}. \tag{1.9}$$

É muito útil decorar a seguinte tabela: Analisemos agora como muda (em valor absoluto e sinal) cada uma das funções trigonométricas básicas, quando o ângulo α varia de 0 até 2π. Vamos considerar o círculo trigonométrico.

graus	0	30	45	60	90	180	270	360
radianos	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

1.1 $\operatorname{sen}\alpha$

De acordo com a primeira fórmula (1.7) $\operatorname{sen}\alpha = y$, onde y é a ordenada do ponto final do raio vetor unitário.

1. $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (primeiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi/2$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\operatorname{sen}\alpha_1 < \operatorname{sen}\alpha_2$. Quando α cresce de 0 até $\pi/2$, o $\operatorname{sen}\alpha$ cresce monotanamente de 0 até 1.

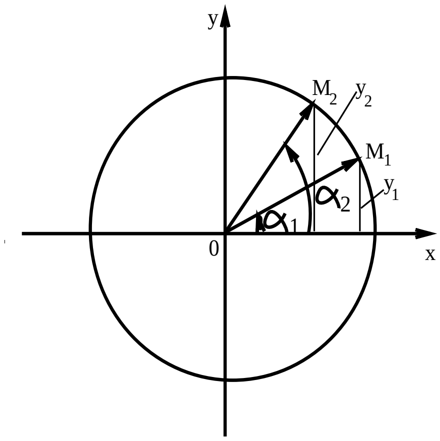


Figura 1.2: primeiro Quadrante

2. $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ (segundo quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, então $y_1 > y_2$, e portanto $\operatorname{sen}\alpha_1 > \operatorname{sen}\alpha_2$. Quando α cresce de $\pi/2$ até π, o $\operatorname{sen}\alpha$ decresce monotanamente de 1 até 0.

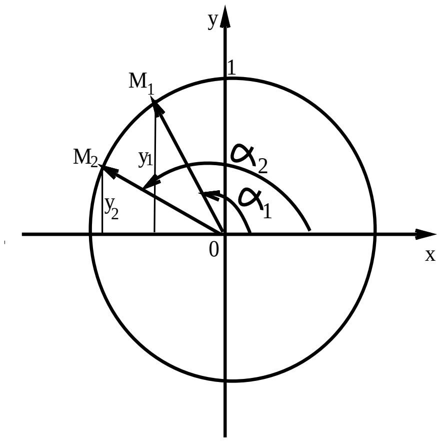


Figura 1.3: Segundo Quadrante

3. $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$ (terceiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 3\pi/2$, então $y_1 > y_2$, e portanto $\operatorname{sen}\alpha_1 > \operatorname{sen}\alpha_2$. Quando α cresce de π até $3\pi/2$, o $\operatorname{sen}\alpha$ decresce monotanamente de 0 até -1.

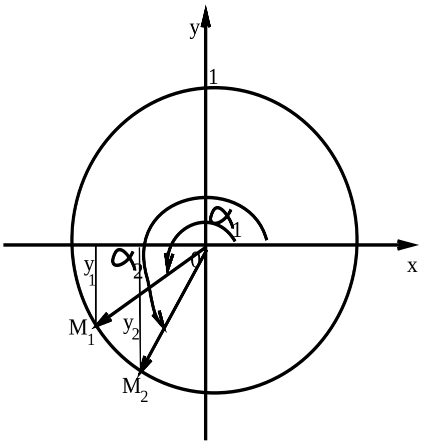


Figura 1.4: Terceiro Quadrante

4. $3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ (quarto quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $3\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\operatorname{sen}\alpha_1 < \operatorname{sen}\alpha_2$. Quando α cresce de π até $3\pi/2$, o $\operatorname{sen}\alpha$ cresce monotanamente de -1 até 0.

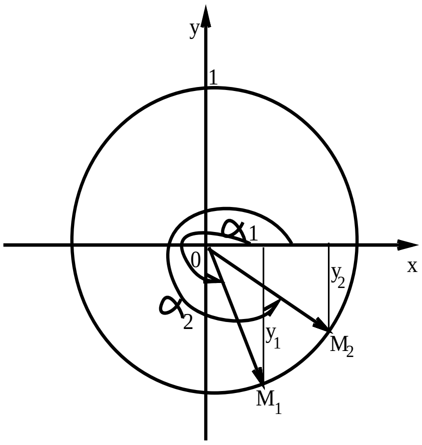


Figura 1.5: Quarta Quadrante

Assim, para qualquer α, o valor absoluto da função $\operatorname{sen}\alpha$ não é superior a 1, isto é : $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$, ou

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1.$$

1.2 $\cos\alpha$

De acordo com a segunda fórmula (1.7) $\cos\alpha = x$, onde x é a abscissa do ponto final do raio vetor unitário.

1. $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (primeiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi/2$,então $x_2 < x_1$, e portanto $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$. Quando α cresce de 0 até $\pi/2$, o $\cos\alpha$ decresce monotanamente de 1 até 0.

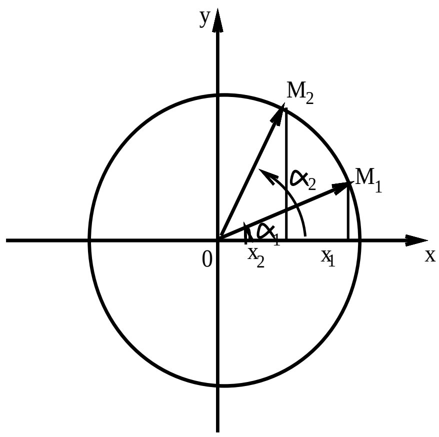


Figura 1.6: primeiro Quadrante

2. $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ (segundo quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$,então $x_1 > x_2$, e portanto $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$. Quando α cresce de $\pi/2$ até π, o $\cos\alpha$ decresce monotanamente de 0 até -1.

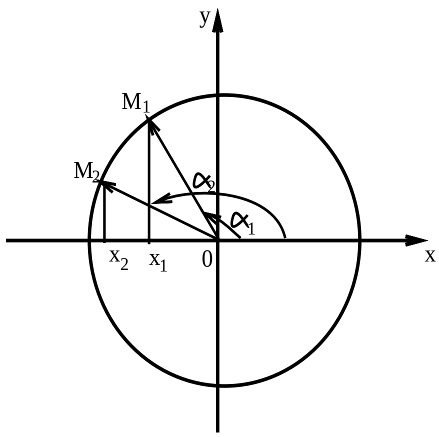


Figura 1.7: Segundo Quadrante

3. $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$ (terceiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 3\pi/2$, então $x_1 < x_2$, e portanto $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$. Quando α cresce de π até $3\pi/2$, o

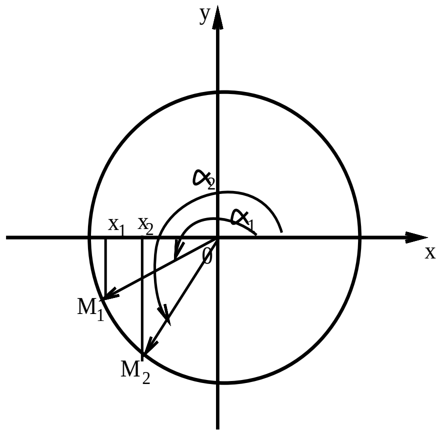


Figura 1.8: Terceiro Quadrante

$\cos\alpha$ cresce monotanamente de -1 até 0.

4. $3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ (quarto quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $3\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$, então $x_1 < x_2$, e portanto $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2$. Quando α cresce de π até $3\pi/2$, o $\operatorname{sen}\alpha$ cresce monotanamente de 0 até 1.

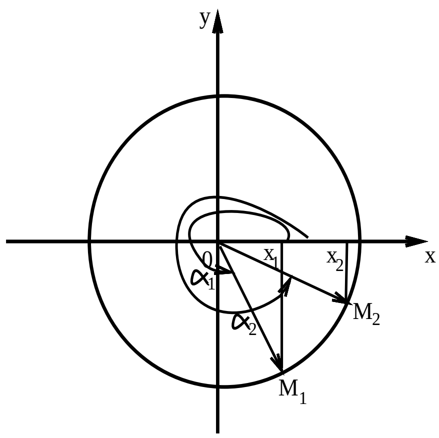


Figura 1.9: Quarta Quadrante

Assim, para qualquer α, o valor absoluto da função $\cos\alpha$ não é superior a 1, isto é : $|\cos\alpha| \leq 1$, ou

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

1.3 $\tan\alpha$

De acordo com a terceira fórmula (1.7) $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$.

1. $0 \leq \alpha < \pi/2$ (primeiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$. Quando α cresce de 0 até $\pi/2$, a $\tan\alpha$ cresce ilimitadamente. Se o ângulo α tende a $\pi/2$ pela esquerda, então $\tan\alpha$ tende a mais infinito, ou seja

$$\tan\alpha \to +\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to \pi/2, \qquad \text{onde} \quad \alpha < \pi/2.$$

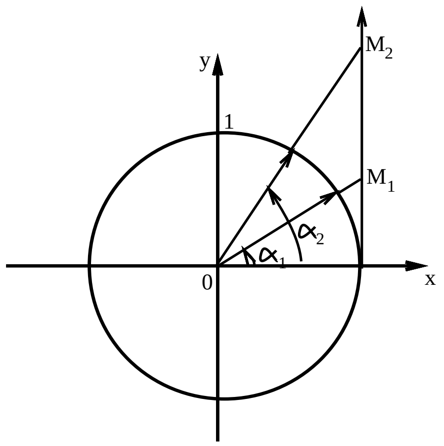


Figura 1.10: primeiro Quadrante

2. $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ (segundo quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$. Quando α cresce de $\pi/2$ até π, a $\tan\alpha$ cresce monotanamente até 0. Se o ângulo α tende a $\pi/2$ pela direita, então $\tan\alpha$ tende a menos infinito, ou seja

$$\tan\alpha \to -\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to \pi/2, \qquad \text{onde} \quad \alpha > \pi/2.$$

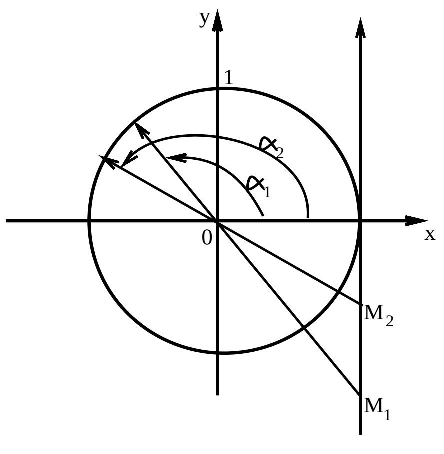


Figura 1.11: Segundo Quadrante

3. $\pi \leq \alpha < 3\pi/2$ (terceiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 3\pi/2$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$. Quando α cresce de π até $3\pi/2$, a

$\tan\alpha$ cresce ilimitadamente. Se o ângulo α tende a $3\pi/2$ pela esquerda, então $\tan\alpha$ tende a mais infinito, ou seja

$$\tan\alpha \to +\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to 3\pi/2, \qquad \text{onde} \quad \alpha < 3\pi/2.$$

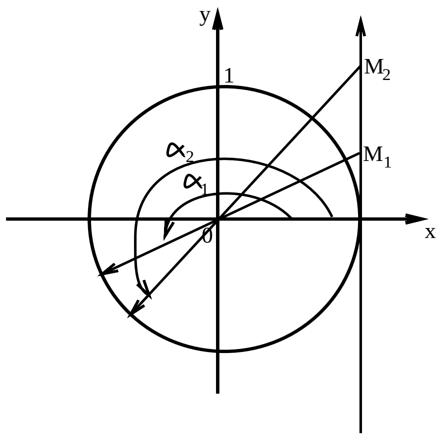


Figura 1.12: Terceiro Quadrante

4. $3\pi/2 < \alpha \leq 2\pi$ (quarto quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $3\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$, então $y_1 < y_2$, e portanto $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$. Quando α cresce de $3\pi/2$ até 2π, a $\tan\alpha$ cresce até 0. Se o ângulo α tende a $3\pi/2$ pela direita, então $\tan\alpha$ tende a menos infinito, ou seja

$$\tan\alpha \to -\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to 3\pi/2, \qquad \text{onde} \quad \alpha > 3\pi/2.$$

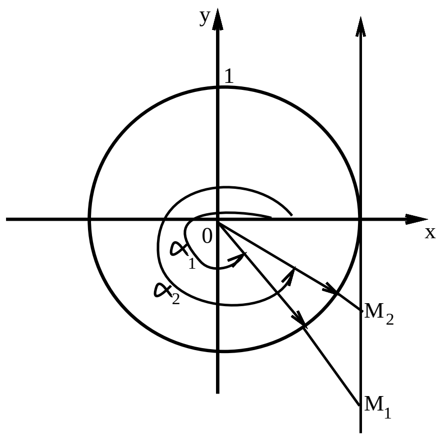


Figura 1.13: Quarta Quadrante

1.4 $\operatorname{cotan}\alpha$

De acordo com a quarta fórmula (1.7) $\operatorname{cotan}\alpha = \dfrac{x}{y}$.

1. $0 < \alpha \leq \pi/2$ (primeiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2$, então $x_2 < x_1$, e portanto $\text{cotan}\,\alpha_2 < \text{cotan}\,\alpha_1$. Quando α cresce de 0 até $\pi/2$, a $\text{cotan}\,\alpha$ decresce até 0. Se o ângulo α tende a 0 pela direita, então $\text{cotan}\,\alpha$ tende a mais infinito, ou seja
$$\tan\alpha \to +\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to 0, \qquad \text{onde} \quad \alpha > 0.$$

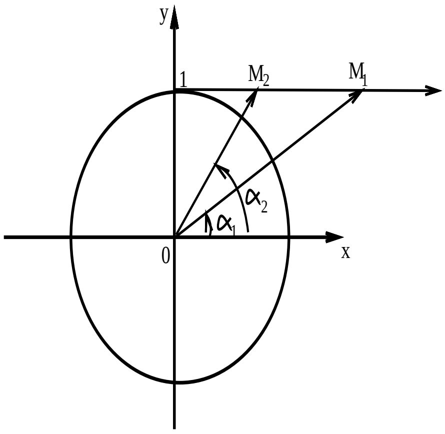


Figura 1.14: primeiro Quadrante

2. $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ (segundo quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, então $x_2 < x_1$, e portanto $\text{cotan}\,\alpha_2 < \text{cotan}\,\alpha_1$. Quando α cresce de $\pi/2$ até π, a $\text{cotan}\,\alpha$ decresce de 0 até $-\infty$. Se o ângulo α tende a π pela esquerda, então $\text{cotan}\,\alpha$ tende a menos infinito, ou seja
$$\text{cotan}\,\alpha \to -\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to \pi, \qquad \text{onde} \quad \alpha < \pi.$$

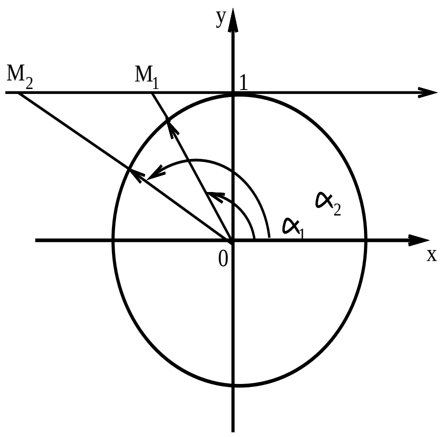


Figura 1.15: Segundo Quadrante

3. $\pi < \alpha \leq 3\pi/2$ (terceiro quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $\pi < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 3\pi/2$, então $x_1 > x_2$, e portanto $\text{cotan}\,\alpha_1 > \text{cotan}\,\alpha_2$. Quando α cresce de π até

$3\pi/2$, a $\tan\alpha$ decresce. Se o ângulo α tende a π pela direita, então $\operatorname{cotan}\alpha$ tende a mais infinito, ou seja

$$\operatorname{cotan}\alpha \to +\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to \pi, \qquad \text{onde} \quad \alpha > \pi.$$

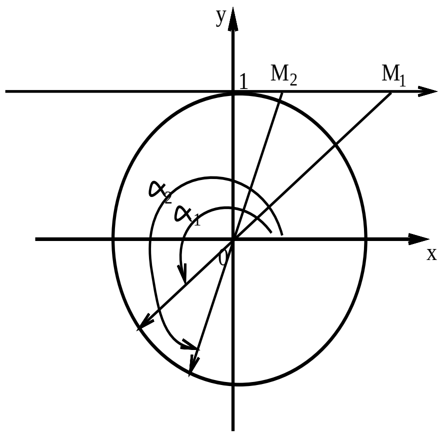


Figura 1.16: Terceiro Quadrante

4. $3\pi/2 \leq \alpha < 2\pi$ (quarto quadrante). Se α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades $3\pi/2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$, então $x_1 > x_2$, e portanto $\operatorname{cotan}\alpha_1 > \operatorname{cotan}\alpha_2$. Quando α cresce de $3\pi/2$ até 2π, a $\operatorname{cotan}\alpha$ decresce de 0 até $-\infty$. Se o ângulo α tende a 2π pela esquerda, então $\cot\alpha$ tende a menos infinito, ou seja

$$\operatorname{cotan}\alpha \to -\infty \quad \text{quando} \quad \alpha \to 2\pi, \qquad \text{onde} \quad \alpha < 2\pi.$$

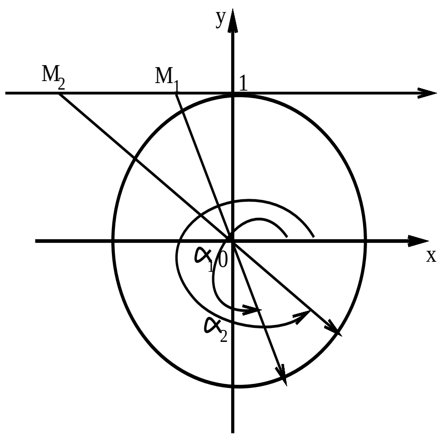


Figura 1.17: Quarta Quadrante

1. Pode o seno de um ângulo ser igual a:

$$a)4/5;\ b)-7/8;\ c)\sqrt{6}/2;\ d)-\sqrt{3}/2;\ e)10/3;\ f)\ a+1/a,\ a\neq 0?$$

2. Onde se encontra o ângulo α, de tal forma que

$$a)\,\mathrm{sen}\,\alpha<0;\ b)\cos\alpha>0;\ c)\tan\alpha<0;\ d)\,\mathrm{cotan}\,\alpha>0;\ e)\tan\alpha>0;\ f)\ \mathrm{cotan}\,\alpha<0?$$

3. Analise o comportamento da função $\sec\alpha$ quando o ângulo α varia entre 0 e 2π.

4. Analise o comportamento da função $\mathrm{cosec}\,\alpha$ quando o ângulo α varia entre 0 e 2π.

Capítulo 2

Relação entre as Funções Trigonométricas

2.1 Identidades Trigonométricas Básicas

Entre as funções trigonométricas básicas tem-se as seguintes identidades:

1.
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{2.1}$$

Tomando $r = 1$, obtemos, para qualquer ângulo α : $\operatorname{sen}\alpha = y$ e $\cos\alpha = x$, onde y e x são as projeções do raio vetor unitário sobre os eixos coordenados. Pelo Teorema de Pitágoras: $|x|^2 + |y|^2 = 1$, pois $r = 1$, donde

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2.
$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2.2}$$

onde $\alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \tag{2.3}$$

onde $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
As fórmulas (2.2) e (2.3) servem como definição das funções $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$

4.
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \tag{2.4}$$

onde $\alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5.
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \tag{2.5}$$

onde $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

As fórmulas (2.4) e (2.5) servem como definição das funções $\sec\alpha$ e $\operatorname{cosec}\alpha$

6. Das fórmulas (2.2) e (2.3), obtemos

$$\tan\alpha.\operatorname{cotan}\alpha = 1, \tag{2.6}$$

onde $\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

7. Dividendo a igualdade (2.1) por $\cos^2\alpha$, desde que $\cos\alpha \neq 0$, obtemos

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \tag{2.7}$$

onde $\alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

8. Dividendo a igualdade (2.1) por $\operatorname{sen}^2\alpha$, desde que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, obtemos

$$1 + \operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha, \tag{2.8}$$

onde $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.1 *Demonstre a igualdade*

$$\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha) + \cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{cotan}^2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha.$$

Substituindo na parte esquerda da igualdade, as fórmulas (2.7) e (2.8) para $1+\tan^2\alpha$ e $1+\operatorname{cotan}^2\alpha$ repectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha) + \cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{cotan}^2\alpha) =\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha(\sec^2\alpha) + \cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha) =\\ &= \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha.\end{aligned}$$

Exemplo 2.2 *Simplifique*

$$M = 2(\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha).$$

Desenvolvamos $(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^3$:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 &= \operatorname{sen}^6\alpha + 3\operatorname{sen}^4\alpha\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha\\ 1 &= \operatorname{sen}^6\alpha + 3\operatorname{sen}^4\alpha\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha &= 1 - 3\operatorname{sen}^4\alpha\cos^2\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha =\\ &= 1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha.\end{aligned}$$

De forma similar

$$\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Substituindo estas expressões em M, obtemos

$$M = 2(\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha) = 2(1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha) - 3(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha) = -1.$$

2.2 Cálculo de uma Função Trigonométrica, conhecida uma delas

Através das fórmulas (2.1)-(2.8) podemos expressar qualquer uma das seis funções trigonométricas, em função de uma função trigonométrica conhecida.

1. Conhecendo $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha},$$
$$\tan\alpha = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}},\ \ \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Conhecendo $\cos\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$
$$\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\ \ \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

3. Conhecendo $\tan\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},\ \ \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Exemplo 2.3 *Se* $\cos\alpha = -3/5,\ \ \pi < \alpha < 3\pi/2$. *Calcular* $\operatorname{sen}\alpha, \tan\alpha$ *e* $\operatorname{cotan}\alpha$.

O ângulo α pertence ao terceiro quadrante, onde $\operatorname{sen}\alpha < 0, \tan\alpha > 0$ e $\operatorname{cotan}\alpha > 0$.
Portanto,

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} - \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3},\ \ \ \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{3}{4}.$$
$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

2.3 Paridade e periodicidade de Funções Trigonométricas

2.3.1 Paridade de Funções Trigonométricas

Primeiramente, lembremos a definição de função par e função ímpar.

O Conjunto de pontos X da reta numérica(reta que representa o conjunto $\mathbb{R}$) chama-se simétrico com relação à origem de coordenadas, se para qualquer ponto $x \in X$ o número $-x$ também pertence a X.
Exemplos de tais conjuntos podem ser:
a) a união dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$; *b*) o intervalo $[-a, a]$; *c*) o intervalo $(-a, a)$; *d*) o conjunto $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Definição 2.1 *A função* $y = f(x)$*, definida no conjunto* X *simétrico com relação à origem de coordenadas, chama-se par, se:*

$$f(x) = f(-x),\ \ \ \textit{para}\ \ \textit{qualquer}\ x \in X.$$

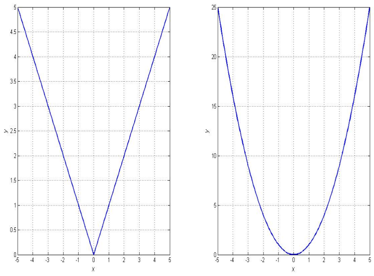


Figura 2.1: Gráficos de funções pares

Exemplos de funções pares são as seguintes funções

$$f(x) = 3x^6 \quad f(x) = \frac{x^6}{12+5x^4}, \quad f(x) = 3\cos 2x, \quad f(x) = 3^{|3x|} - |\tan x|,$$

Por exemplo, para $f(x) = \dfrac{x^6}{12+5x^4}$, temos

$$f(-x) = \frac{(-x)^6}{12+5(-x)^4} = \frac{x^6}{12+5x^4} = f(x).$$

Se $f(x), \quad x \in X$, é par, então para cada $x \in X$ os pontos do seu gráfico $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ são simétricos com relação ao eixo y. Desta forma, o gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo y.

Definição 2.2 *A função $y = f(x)$, definida no conjunto X simétrico com relação à origem de coordenadas, chama-se ímpar, se:*

$$f(-x) = -f(x), \quad \textit{para} \quad \textit{qualquer } x \in X.$$

Exemplos de funções ímpares são as seguintes funções

$$y = 5x^7 \quad y = \frac{2x^5}{3-x^4}, \quad y = 5\,\text{sen}\, 3x, \quad y = x^3\sqrt{x^6-24}.$$

Se $f(x), \quad x \in X$, é ímpar, então para cada $x \in X$ os pontos do seu gráfico $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ são simétricos com relação à origem de coordenadas. Desta forma, o gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem de coordenadas.

Não vamos a concluir daqui, que todas as funções se dividem em funções pares e funções ímpares, pois a maioria das funções não são pares nem ímpares. Por exemplo podemos citar duas funções,

1. A função $y = \sqrt{2x^5}$ não é par nem ímpar, pois seu domínio não é um conjunto simétrico com relação à origem de coordenadas;

2. A função $y = (1/7)^x$ também não é par nem ímpar, ainda que seu domínio seja um conjunto simétrico com relação à origem de coordenadas. No entanto, por exemplo,

$$y(1) = 1/7 \neq 7 = y(-1), \qquad y(1) = 1/7 \neq -7 = -y(-1).$$

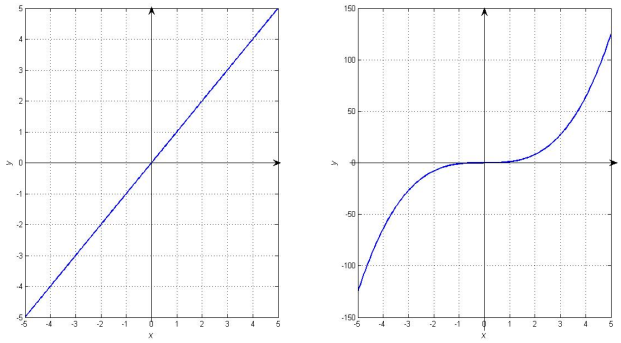


Figura 2.2: Gráficos de funções ímpares

A única função, definida num conjunto simétrico M com relação à origem de coordenadas que é par e ímpar ao mesmo tempo neste conjunto, é a função identicamente nula $f(x) \equiv 0, \quad x \in M \subset \mathbb{R}$.

Qualquer função $y = f(x)$, definido no conjunto X simétrico com relação à origem de coordenadas pode-se escrever como soma de uma função par $\varphi(x)$ e de uma função ímpar $\psi(x)$: $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, donde

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Exemplo 2.4 *Escreva a função $f(x) = e^x + x + 1$ como soma de uma função par e uma função ímpar.*

Podemos escrever $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{e^x + x + 1 + e^{-x} - x + 1}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} + 2}{2}$, $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{e^x + x + 1 - e^{-x} + x - 1}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x} + 2x}{2}$. Segue daqui, $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

Exemplo 2.5 *Escreva como soma de uma função par e uma função ímpar a seguinte função*

$$y = 3^x.$$

Escrevamos

$$\varphi(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}, \qquad \psi(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Assim, $\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x)$, isto é, $\varphi(x)$ é uma função par, e $\psi(x)$ é uma função ímpar. Assim

$$y(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

2.3.2 Propriedades das Funções Pares e Ímpares

1. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções pares no mesmo conjunto X, então as funções $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, com $g(x) \neq 0$, são funções pares no conjunto X.

2. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções ímpares no mesmo conjunto X, então as funções $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, são funções ímpares no conjunto X. A função $f(x)g(x)$ é par no conjunto X; da mesma forma, a função $f(x)/g(x)$ é par desde que $g(x)\neq 0$.

Exemplo 2.6 *Mostre que a seguinte função é ímpar*

$$y=\log_3(x^3+\sqrt{1+x^6}).$$

O domínio de existência da função dada é o conjunto de todo os pontos x tais que $x^3+\sqrt{1+x^6}>0$. Esta desigualdade é satisfeita para qualquer $x\in\mathbb{R}$. na verdade se $x=0$, então $x^3+\sqrt{1+x^6}=1>0$. Para qualquer $x\neq 0$ temos

$$x^3+\sqrt{1+x^6}=x^3+|x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}>x^3+|x^3|\geq 0.$$

Desta forma, o domínio da função dada é $\mathbb{R}$ e portanto, simétrica com relação à origem de coordenadas.

Continuando com a análise, temos para qualquer x real, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} y(-x) &= \log_3((-x)^3+\sqrt{1+(-x)^6})=\log_3(-x^3+\sqrt{1+x^6})\\ &= \log_3\frac{(-x^3+\sqrt{1+x^6})(x^3+\sqrt{1+x^6})}{x^3+\sqrt{1+x^6}}=\log_3\frac{1}{x^3+\sqrt{1+x^6}}\\ &= \log_3(x^3+\sqrt{1+x^6})^{-1}=-\log_3(x^3+\sqrt{1+x^6})=\\ &= -y(x). \end{aligned}$$

Como o domínio da função dada é a reta numérica e $y(x)=-y(-x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então a função dada é ímpar. Para as funções trigonométricas vale a seguinte afirmação

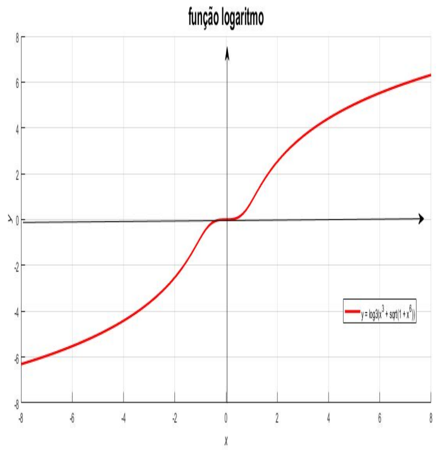


Figura 2.3: Gráfico da função logaritmo $y=\log_3(x^3+\sqrt{1+x^6})$

Teorema 2.3.1 *As funções* $\cos\alpha$ *e* $\sec\alpha$ *são funções pares, isto é,*

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha \;\; e \;\; \sec(-\alpha)=\sec\alpha,$$

as funções $\operatorname{sen}\alpha, \tan\alpha, \operatorname{cotan}\alpha$ *e* $\operatorname{cosec}\alpha$, *são funções ímpares, isto é,*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha, &\quad \operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha, &\quad \operatorname{cotan}(-\alpha)=-\operatorname{cotan}\alpha \end{aligned}$$

Prova: Consideremos dois ângulos formados pelo raio vetor unitário α e $-\alpha$, observamos qu $\cos\alpha$ e $\cos(-\alpha)$ possuem a mesma abscissa x e portanto $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Donde segue

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Também, observamos que para $\operatorname{sen}(-\alpha)$ e $\operatorname{sen}\alpha$ suas ordenadas são iguais em módulo, mas de sinais opostas, ou seja, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -y$ e $\operatorname{sen}\alpha = y$, por isso, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$.
Para $\tan\alpha$, obtemos

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha.$$

Para a $\operatorname{cotan}\alpha$, obtemos

$$\operatorname{cotan}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)} = \frac{cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\tan\alpha. \quad \blacksquare$$

2.4 Funções Trigonométricas Periódicas

A função $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ chama-se periódica em X, se existe um número $T > 0$, chamado período da função, tal que:

1. $x + T$ e $x - T$ pertencem ao conjunto X para cada $x \in X$;

2. Para cada $x \in X$ temos a igualdade

$$f(x + T) = f(x).$$

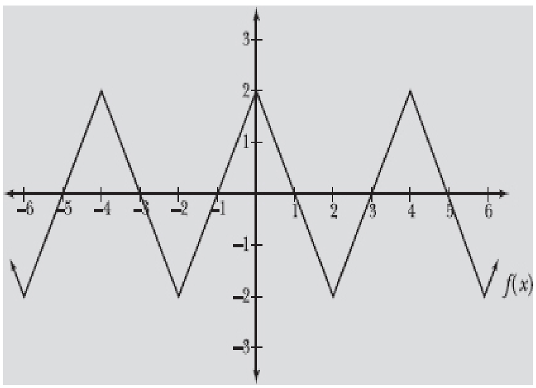


Figura 2.4: Gráfico de uma função com período 4

Uma das propriedades importantes das fuções trigonométricas é a periodicidade.

Exemplo 2.7 *Mostre que se a função*

$$f(x) = \cos x + \operatorname{sen}\alpha x$$

é periódica, então α é um número racional.

Observamos que o domínio da função é $\mathbb{R}$. Por hipótese $f(x)$ é periódica. Seja $T > 0$ o período da função, então para cada x e α, temos

$$\cos(x+T) + \operatorname{sen}\alpha(x+T) = \cos x + \operatorname{sen}\alpha x.$$

Escrevamos nesta igualdade, $x = 0$ e $x = -T$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos T + \operatorname{sen}\alpha T &= 1 \\ 1 &= \cos T - \operatorname{sen}\alpha T. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e logo simplificando por 2, obtemos

$$\cos T = 1, \quad \text{isto é}, \; T = 2\pi m, \; m \in \mathbb{Z}.$$

Agora, somando as duas equações, obtemos

$$2\operatorname{sen}\alpha T = 0, \quad \text{isto é}, \; \alpha T = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Como $T \neq 0$, então $k, m \neq 0$, portanto,

$$\alpha 2\pi m = k\pi, \; \text{donde } \alpha = k/(2m), \; \text{isto é}, \; \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Antes de demonstrar o seguinte teorema sobre a periodicidade das funções trigonométricas, introduziremos a definição de período principal.

Definição 2.3 *O menor dos períodos positivos de uma função periódica chama-se período principal.*

Teorema 2.4.1 *As funções trigonométricas* $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha, \tan\alpha$ *e* $\operatorname{cotan}\alpha$ *são funções periódicas, onde* $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, \sec\alpha, \operatorname{cosec}\alpha$ *possuem períodos principais* 2π *e as funções* $\tan\alpha$ *e* $\operatorname{cotan}\alpha$ *possuem período principal* π.

2.5 Dependência das Funções Trigonométricas de Ângulos Complementares

Dois ângulos α e β chamam-se complementares se $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Teorema 2.5.1

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha.$$

Corolário 2.1

$$\tan\beta = \operatorname{cotan}\alpha, \quad \operatorname{cotan}\beta = \tan\alpha.$$

Prova: Seja $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, então

$$\tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotan}\alpha,$$

$$\operatorname{cotan}\beta = \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha. \qquad \blacksquare$$

Agora queremos analisar as possíveis expressões das funções trigonométricas dos ângulos $\pi/2+\alpha, \pi \pm \alpha, 3\pi/2 \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ através do ângulo α arbitrário.

Nas fórmulas do Teorema 2.5.1 e do Corolário 2.1, trocamos α por -α, obtemos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \operatorname{cotan}(-\alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha, \\ \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \end{cases} \tag{2.9}$$

Nas fórmulas 2.9, trocamos α por $\pi/2+\alpha$, obtemos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{2}+\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{2}+\alpha)) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha, \\ \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha, \quad \text{pois, } \pi \text{ é período principal} \\ \operatorname{cotan}(\pi+\alpha) = \operatorname{cotan}\alpha, \text{ pois, } \pi \text{ é período principal} \end{cases} \tag{2.10}$$

De forma análoga encontramos,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)) = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \\ \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)) = -\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \\ \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha, \\ \operatorname{cotan}(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha. \end{cases} \tag{2.11}$$

Trocando nas fórmulas (2.10) α por -α, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha, \\ \operatorname{cotan}(\pi-\alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha. \end{cases} \tag{2.12}$$

Trocando nas fórmulas (2.11) α por -α, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+(\pi-\alpha)) = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \\ \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}+(\pi-\alpha)) = -\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \\ \tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{cotan}\alpha, \\ \operatorname{cotan}(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha. \end{cases} \tag{2.13}$$

Por fim, como 2π é período para todas as funções trigonométricas, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(2\pi-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \tan(2\pi-\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \\ \operatorname{cotan}(2\pi-\alpha) = \operatorname{cotan}(-\alpha) = -\operatorname{cotan}\alpha, \end{cases} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha, \\ \tan(2\pi+\alpha) = \tan\alpha, \\ \operatorname{cotan}(2\pi+\alpha) = \operatorname{cotan}\alpha, \end{cases} \tag{2.15}$$

Capítulo 3

Gráfico das Funções Trigonométricas

Funções seno e Cosseno
Para as funções seno e cosseno, temos

1. Domínio: $(-\infty, +\infty)$;

2. Imagem: $[-1, +1]$;

3. As funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π;

4. As funções seno e cosseno se anulam em infinitos pontos; a função seno se anula nos pontos da forma $k\pi$, e a função cosseno se anula nos pontos da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

5. As funções seno e cosseno são limitadas.

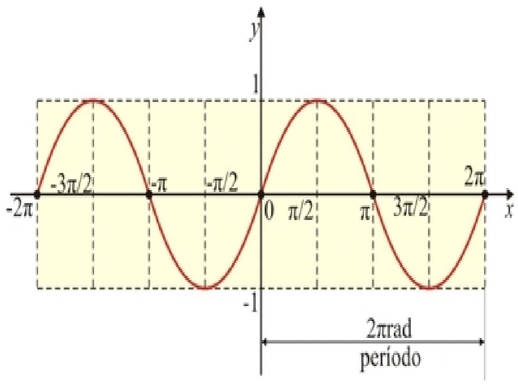


Figura 3.1: Gráfico da função seno

Usando a fórmula

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}),$$

não é difícil obter o gráfico da função $y = \cos x$ a partir do gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$, com uma simples translação ao longo do eixo $0x$ a esquerda um comprimento de $\frac{\pi}{2}$.

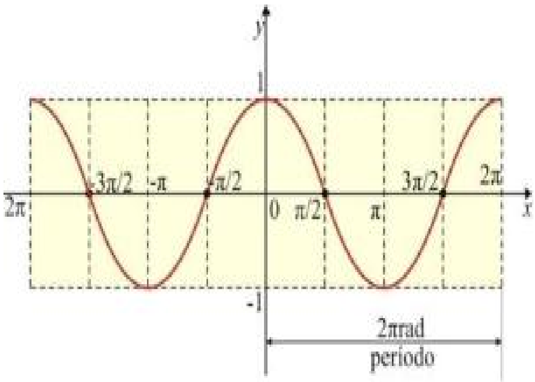


Figura 3.2: Gráfico da função cosseno

Quando movimentamos os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ ao longo do eixo $0x$ a direita ou esquerda num intervalo de comprimento 2π, estes gráficos coincidem, o que corresponde com o fato, das funções sen x e $\cos x$ serem periódicas de período 2π, isto é,

$$\operatorname{sen}(x \pm 2\pi) = \operatorname{sen} x, \text{ e } \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

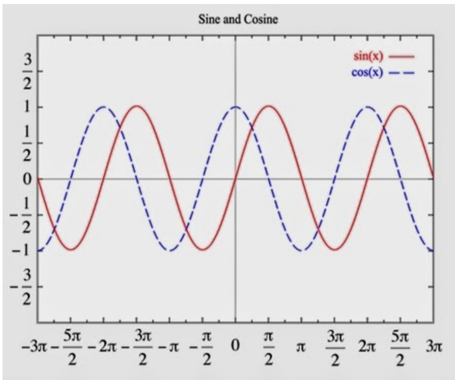


Figura 3.3: Gráfico da função seno e cosseno

Função Tangente

Para a função tangente, $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, temos

1. Domínio: $(-\infty, +\infty) \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

2. Imagem: $(-\infty, +\infty)$;

3. A função tangente se anula em infinitos pontos da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

4. A função tangente é ilimitada.

Quando movimentamos o gráfico da função $y = \tan x$ ao longo do eixo $0x$ a direita ou esquerda num intervalo de comprimento π, este gráfico coincide com o gráfico da função $y = \tan(x \pm \pi)$, isto significa que a função $\tan x$ possue período π.

O gráfico da função $y = \tan x$ é mostrado na seguinte figura.

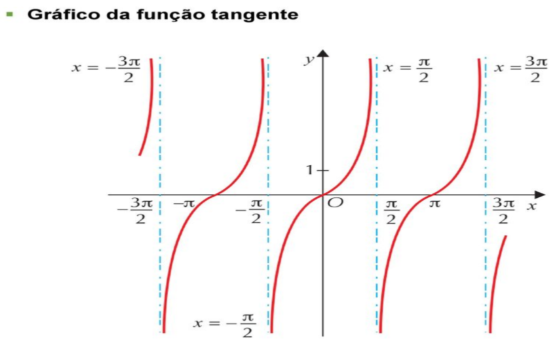


Figura 3.4: Gráfico da função $y = \tan x$

Função Cotangente

Para a função cotangente, $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, temos

1. Domínio: $(-\infty, +\infty) \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

2. Imagem: $(-\infty, +\infty)$;

3. A função cotangente se anula em infinitos pontos da forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

4. A função cotangente é ilimitada.

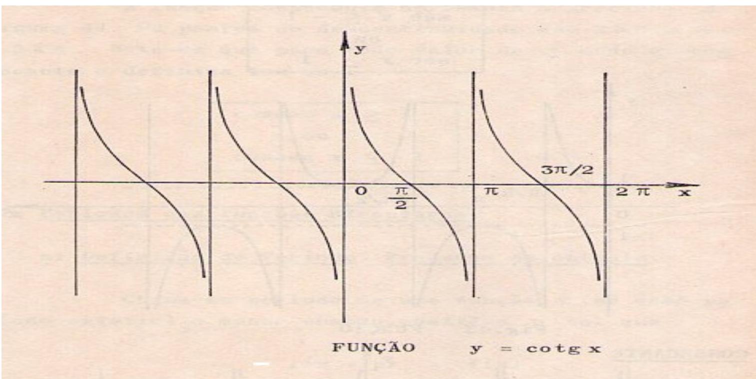


Figura 3.5: Gráfico da função $y = \cot x$

Também observa-se que a função $y = \cot x$ possui período π, isto é,

$$\cot(x \pm \pi) = \cot x, \quad \text{para qualquer } x.$$

Capítulo 4

Transformações de Expressões Trigonométricas

Daremos a seguir as fórmulas das funções trigonométricas da soma ou diferença de dois ângulos. Sejam α e β dois ângulos.

4.1 Seno da Soma ou Diferença de dois ângulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \qquad (4.1)\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \end{aligned}$$

4.2 Cosseno da Soma ou Diferença de dois ângulos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (4.2)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

4.3 Tangente da Soma ou Diferença de dois ângulos

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad (4.3)\\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \end{aligned}$$

4.4 Cotangente da Soma ou Diferença de dois ângulos

$$\begin{aligned} \operatorname{cotan}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{cotan}\alpha\tan\beta-1}{\operatorname{cotan}\alpha+\operatorname{cotan}\beta} \qquad (4.4)\\ \operatorname{cotan}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{cotan}\alpha\tan\beta+1}{\operatorname{cotan}\beta-\operatorname{cotan}\alpha} \end{aligned}$$

Exemplo 4.1 *Calcule* $\tan 105^o$

$$\begin{aligned}\tan 105^o &= \tan(60^o+45^o) = \frac{\tan 60^o + \tan 45^o}{1-\tan 60^o \tan 45^o} = \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

4.5 Funções Trigonométricas de ângulos duplo e metade

Escrevendo nas fórmulas (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), $\alpha = \beta$, obtemos as seguintes expressões em função do ângulo duplo:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

É importante notar, usando a identidade trigonométrica fundamental: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, que podemos escrever o cosseno do ângulo duplo ou em função do seno ou em função do cosseno do ângulo simples:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

$$\operatorname{cotan} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotan}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotan}\alpha}.$$

Agora considerando α como ângulo duplo e $\alpha/2$ o ângulo metade, obtemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha/2\cos\alpha/2.$$

$$\cos\alpha = \cos^2\alpha/2 - \operatorname{sen}^2\alpha/2.$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}.$$

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{\operatorname{cotan}^2\alpha/2 - 1}{2\operatorname{cotan}\alpha/2}.$$

Exemplo 4.2 *Simplifique a seguinte expressão:*

$$\operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{cotan}\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha) - 1 - \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Simplesmente usando as definições de $\tan\alpha, \operatorname{cotan}\alpha$ e seno do ângulo duplo, obtemos

$$\begin{aligned}&= \operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{cotan}\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha) - 1 - \operatorname{sen} 2\alpha = \\ &= \operatorname{sen}^2\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \cos^2\alpha\left(\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) - 1 - \operatorname{sen}2\alpha = \\ &= \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) + \cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) - 1 - \operatorname{sen}2\alpha = \\ &= (\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) - 1 - \operatorname{sen}2\alpha = \\ &= \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1 - \operatorname{sen}2\alpha = 0.\end{aligned}$$

Exemplo 4.3 *Simplifique*

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Usando as definições do seno e cosseno do ângulo duplo, obtemos

$$\begin{aligned}&= \frac{1-\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-(1-2\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} + \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2\tan\alpha.\end{aligned}$$

1. Encontre $\operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha,\ \tan\alpha$, se $\tan(\alpha/2) = 7/8$;

2. Demonstre a igualdade

$$\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\tan 8\alpha + 16\operatorname{cotan} 16\alpha = \operatorname{cotan}\alpha.$$

3. Demonstre

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

4. Calcule as seguintes expressões trigonométricas:
   (a) $\cos 105^o$;
   (b) $\tan 15^o$;
   (c) $\operatorname{sen} 22^o30'$;
   (d) $\tan 22^o30'$

5. Simplifique:
   (a) $\operatorname{cotan} 60^o + \tan 40^o + \operatorname{cotan} 40^o + \operatorname{cotan} 30^o$
   (b) $\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha$.

6. Demonstre as igualdades
   (a) $\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{2\pi}{9} + \tan\frac{5\pi}{18} + \tan\frac{\pi}{3} = \frac{8\operatorname{sen}(7\pi/18)}{\sqrt{3}}$
   (b) $\tan 10^o\tan 20^o + \tan 20^o\tan 60^o + \tan 60^o\tan 10^o = 1$.

Capítulo 5

Funções Trigonométricas Inversas e seus Gráficos

Chamam-se funções trigonométricas inversas as seguintes funções:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad f(x) = \arccos x, \qquad f(x) = \arctan x, \quad f(x) = \operatorname{arccot} x.$$

Função Arco-seno
Para a função arcoseno, $y = \operatorname{arcsen} x$, temos

1. Domínio: $[-1, 1]$;

2. Imagem: $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$;

3. A função arcoseno se anula em um único ponto $x = 0$;

4. A função arcoseno é limitada.

O gráfico da função

$$y = \operatorname{arcsen} x. \tag{5.1}$$

obtem-se pelo método indicado acima para funções inversas. O gráfico todo encontra-se entre as retas veticais $x = -1$ e $x = 1$, isto é, a função (5.1) está definida somente no intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Notamos que a equação (5.1) é equivalente a equação $x = \operatorname{sen} y$, ou seja, para um x dado, obtemos um conjunto infinito de valores para o ângulo y. Para obter a função inversa(injetiva) da função $y = \operatorname{sen} x$, é suficiente considerar um intervalo do eixo x, onde a função seno seja monótona crescente ou decrescente. A função $y = \operatorname{sen} x$ é crescente de -1 até 1, por exemplo no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e em geral em qualquer intervalo da forma $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.
Resumindo

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen} x \leq \frac{\pi}{2},$$

donde

$$-1 \leq x \leq 1.$$

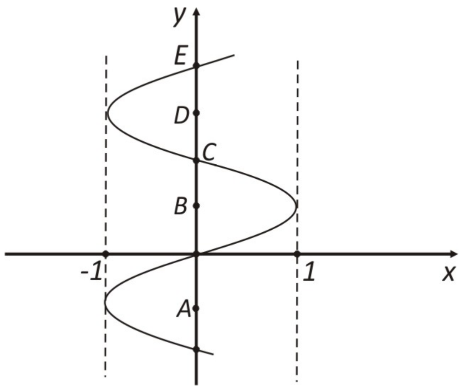


Figura 5.1: Gráfico da função $y=$arcsen x. $A=-\pi/2,\ B=\pi/2,\ C=\pi,\ D=3\pi/2,\ E=2\pi$

Exemplo 5.0.1 *Encontre arcsen*$(\sqrt{3}/2)$.

Na verdade queremos encontrar um ângulo $\alpha \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ tal que $\alpha = \text{arcsen}(\sqrt{3}/2)$ ou $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Daqui é fácil encontrar $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Função Arco-cosseno

Para a função arcocosseno, $y = \arccos x$, temos

1. Domínio: $[-1, 1]$;

2. Imagem: $[0, \pi]$;

3. A função arcocosseno se anula em um único ponto $x = 1$;

4. A função arcocosseno é limitada.

Um análise parecida feito para a função $y = \operatorname{arcsen} x$ pode-se fazer para a função $y = \arccos x$. A função $y = \arccos x$, será injetiva se nos restringimos aos valores do ângulo y, no intervalo $[0, \pi]$, na verdade neste intervalo a função $y = \arccos x$ será monótona decrescente, isto é,

$$0 \le \arccos x \le \pi,$$

donde

$$-1 \le x \le 1.$$

Exemplo 5.0.2 *Calcule o valor de* $y = \cos(\arccos(-0,6))$.

Analisemos a função $z = \cos(\arccos x)$. Denotemos por $t = \arccos x$, donde $\cos t = x$, ou seja $z = \cos t = x$.

Voltando ao nosso exemplo, temos $y = \cos(\arccos(-0,6)) = -0,6$.

Em geral, $x = \cos(\arccos x)$.

Exemplo 5.0.3 *Encontre* $y = \operatorname{sen}(\arccos x)$.

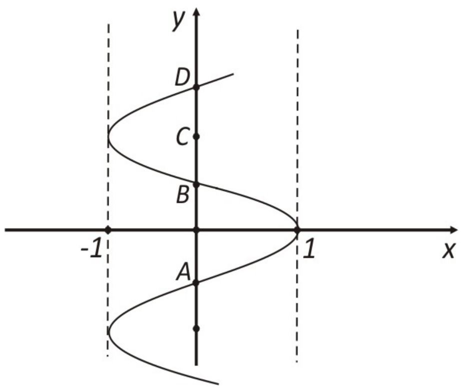


Figura 5.2: Gráfico da função $y = \arccos x$. $A = -\pi/2,\ B = \pi/2,\ C = \pi,\ D = 3\pi/2$

Denotemos por $\beta = \arccos x$, donde $\cos\beta = x$. Por isto $y = \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-x^2}$.

Função Arco-tangente
Para a função arcotangente, $y = \arctan x$, temos

1. Domínio: $(-\infty, +\infty)$;
2. Imagem: $(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2})$;
3. A função arcotangente se anula em um único ponto $x = 0$;
4. A função arcotangente é limitada.

No gráfico da função $y = \arctan x$, observamos que esta função será injetiva (monótona crescente) se nos restringimos aos valores do ângulo y, que tem $\tan y = x$, no intervalo $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

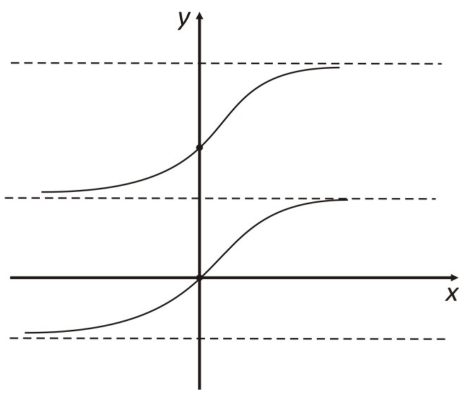


Figura 5.3: Gráfico da função $y = \arctan x$. $A = -\pi/2,\ B = \pi/2,\ C = \pi,\ D = 3\pi/2$

Função Arco-cotangente
Para a função arcocotangente, $y = \operatorname{arccot} x$, temos

1. Domínio: $(-\infty, , +\infty)$;

2. Imagem: $(0,\pi)$;

3. A função não se anula em nenhum ponto;

4. A função arcotangente é limitada.

No gráfico da função $y = \text{arccot}\, x$, observamos que esta função será injetiva(mótona decrescente) se nos restringimos aos valores do ângulo y, que tem $\cot y = x$, no intervalo $(0,\pi)$.

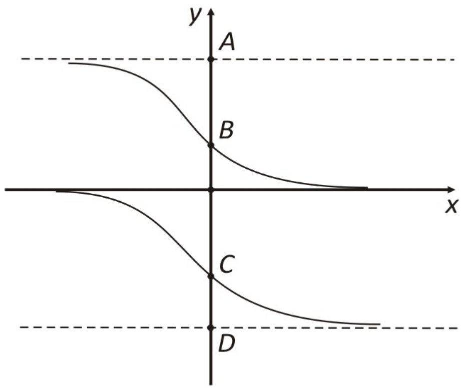


Figura 5.4: Gráfico da função $y = \text{arccot}\, x$. $A = \pi,\ B = \pi/2,\ C = -\pi/2,\ D = -\pi$

Não é difícil mostrar, que as funções inversas trigonométricas definidas acima, satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{cases} \text{arcsen}\, x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \\ \arctan x + \text{arccot}\, x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Mostremos estas afirmações. Primeiramente, provemos que $\arctan x + \text{arccot}\, x = \dfrac{\pi}{2}$. De fato, denotemos por $a = \arctan x$ com $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$ en $b = \text{arccot}\, x$ com $0 < b < \pi$. Donde $-\dfrac{\pi}{2} < a + b < \dfrac{3\pi}{2}$. Por definição $\tan a = x$ e $\cot a = \dfrac{1}{x}$, $\cot b = x$ e $\tan b = \dfrac{1}{x}$, portanto;

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} = \frac{\frac{1}{x}x - 1}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

Daqui temos que $a + b = \dfrac{\pi}{2}$, e pelas notaçoes acima:

$$\arctan x + \text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Agora provemos que $\text{arcsen}\, x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. Denotamos $\alpha = \text{arcsen}\, x$ com $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $\beta = \arccos x$ com $0 < \beta < \pi$. Temos $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Mas, $\text{sen}\ \alpha = x$ e $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta = x$ e $\text{sen}\ \beta = \sqrt{1-x^2}$, portanto;

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha+\beta) &= \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha \\ &= x.x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como no intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ a função $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ é única, então

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

ou seja

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Lista de Exercícios

---

1. Encontre os valores das seguintes funções trigonométricas inversas:

   (a) $\text{sen}(\arccos \frac{3}{5})$;

   (b) $\cos(\arctan x)$;

   (c) $\tan(\arccos x)$;

   (d) $\text{sen}(2 \arccos x)$;

   (e) $\text{sen}(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2})$;

   (f) $\text{sen}[\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2\, \text{arccot}(-2)]$;

   (g) $\text{sen}\left(\text{arcsen}\, \frac{3}{5} + \text{arcsen}\, \frac{4}{5}\right)$;

   (h) $\cos\left(\arccos \frac{8}{17} + \arccos \frac{15}{17}\right)$;

   (i) $\text{sen}(2 \arctan \frac{3}{4}) + \tan\left(\frac{1}{2}\, \text{arcsen}\, \frac{5}{13}\right)$;

   (j) $\text{sen}\left(\text{arcsen}\, \frac{12}{13} + \text{arcsen}\, \frac{5}{13}\right)$.